УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

С. П. Санников

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Самостоятельна работа № 4

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

С. П. Санников

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Методические указания для самостоятельной работы № 4
Направление ВПО 220300, 220200, 220400, 220700

Екатеринбург
2012

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методической комиссией лесоинженерного факультета УГЛТУ
Протокол № 1 от 8.09.11 г.

Рецензент: Ордуянц Г. Г., доц. каф. АПП, канд. техн. наук

Редактор Л. Д. Черных
Оператор компьютерной верстки Т. В. Упорова

Подписано в печать 16.05.12		Формат 60×84 1/16
Плоская печать	Заказ №	Тираж 50 экз.
Поз. 7	Печ. л. 1,86	Цена 9 руб. 88 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Занятия 9, 10

4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА ЭВМ

4.1. Общая характеристика метода статистического моделирования

Сущность метода статистического моделирования. На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т.е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей.

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учётом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Различают две области применения метода статистического моделирования:

- изучение стохастических систем;
- решение детерминированных задач.

Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи.

В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени.

Теоретической основой метода статистического моделирования систем на ЭВМ являются *предельные теоремы теории вероятностей*. Множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценить некоторые средние их характеристики, проявляющие определенную устойчивость. Принципиальное значение предельных теорем состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний (реализаций) N.

Неравенство Чебышева. Для неотрицательной функции $g(\xi)$ случайной величены ξ и любого $K > 0$ выполняется неравенство

$$P\ \{g(\xi) \geq K\} \leq M\,[g(\xi)]\ /\ K. \tag{4.1}$$

В частности, если $g(\xi) = (\xi - \bar{x})^2$ и $K = k^2\sigma^2$, где $\bar{x}$ — среднее арифметическое; σ – среднее квадратичное отклонение, то

$$P\ \{\mid \xi - \bar{x} \mid \geq k\sigma\} \leq 1/k^2. \tag{4.2}$$

Теорема Бернулли. Если проводится N независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A осуществляется с вероятностью p, то относительная частота появления события m/N при $N \to \infty$ сходится по вероятности к p, т.е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} P\ \{\mid m/N - p \mid \geq \varepsilon\} = 0, \tag{4.3}$$

где m – число положительных исходов испытания.

Теорема Пуассона. Если проводится N независимых испытаний и вероятность осуществления события A в i-м испытании равна p_i, то относительная частота появления события m/N при $N \to \infty$ сходится по вероятности к среднему из вероятностей p_i, т.е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} P\ \{\mid m/N - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i \mid \geq \varepsilon\} = 0. \tag{4.4}$$

Теорема Чебышева. Если в N независимых испытаниях наблюдаются значения $x_1, ..., x_N$ случайной величены ξ, то при $N \to \infty$ среднее арифметическое значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию a, т.е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} P\ \{\mid \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - a \mid \geq \varepsilon\} = 0. \tag{4.5}$$

Обобщенная теорема Чебышева. Если $\xi_1, ..., \xi_N$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $a_1, ..., a_N$ и дисперсиями $\sigma_1^2, ..., \sigma^2_N$, ограниченными сверху одним и тем же числом, то при $N \to \infty$ среднее арифметическое значений случайной величины сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\lim_{N\to\infty} P\ \{\mid \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \mid \geq \varepsilon\} = 0. \tag{4.6}$$

Теорема Маркова. Выражение (4.6) справедливо и для зависимых случайных величин $\xi_1, ..., \xi_N$, если только

$$\lim_{N\to\infty} P\ \frac{1}{N^2} D\left[\sum_{i=1}^{N} x_i\right] = 0.$$

Совокупность теорем, устанавливающих устойчивость средних показателей, принято называть *законом больших чисел.*

Центральная предельная теорема. Если $\xi_1, ..., \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математическое ожидание a и дисперсию σ^2, то при $N \to \infty$ закон распределения суммы $\sum_{i=1}^{N} x_i$ неограниченно приближается к нормальному:

$$\lim_{N\to\infty} P\{\alpha < (\sum_{i=1}^{N} x_i - Na) / \sqrt{N\delta} < \beta\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2/2}\,dt = \Phi_0(\beta) - \Phi_0(\alpha).$$

Здесь интеграл вероятностей

$$\Phi_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\gamma} e^{-t^2/2}\,dt\ .$$

Теорема Лапласа. Если в каждом из N независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p , то

$$\lim_{N\to\infty} P\{\ \alpha < (m - Np) / \sqrt{Np(1-p)}\ < \beta\ \} = \Phi_0(\beta) - \Phi_0(\alpha)\ ,$$

где m — число появлений события A в N испытаниях.

Теорема Лапласа является частным случаем центральной предельной теоремы.

Примеры статистического использования. Статистическое моделирование систем на ЭВМ требует формирования значений случайных величин, что реализуется с помощью датчиков (генераторов) случайных чисел. Рассмотрим сущность метода статистического моделирования на примерах.

Пример 4.1. Необходимо методом статистического моделирования найти оценки выходных характеристик некоторой стохастической системы S_R, функционирование которой описывается следующими соотношениями: $x = 1 - e^{-\lambda}$ — входное воздействие, $v = 1 - e^{-\varphi}$ — воздействие внешней среды, где λ и φ — случайные величины, для которых известны их функции распределения. Целью моделирования является оценка математического ожидания $M[y]$ величины y. Зависимость последней от входного воздействия x и воздействия внешней среды v имеет вид: $y = \sqrt{x^2 + v^2}$.

В качестве оценки математического ожидания $M[y]$, как следует из приведенных теорем теории вероятностей, может выступать среднее арифметическое, вычисленное по формуле

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,$$

где y_i — случайное значение величины y;

N — число реализаций, необходимое для статистической устойчивости результатов.

Структурная схема системы S_R показана на рис. 4.1.

Здесь элементы выполняют следующие функции:

вычисление:

$$B_1\colon\ x_i = 1 - e^{-\lambda_i} \text{ и } B_2\colon\ v_i = 1 - e^{-\varphi_i};$$

возведение в квадрат:

$$K_1\colon\ h' = (1 - e^{-\lambda_i})^2 \text{ и } K_2\colon\ h'' = (1 - e^{-\varphi_i})^2;$$

суммирование

$$C\colon\ h_i = (1 - e^{-\lambda_i})^2 + (1 - e^{-\varphi_i})^2;$$

извлечение квадратного корня:

$$И\colon\ y_i = \sqrt{(1 - e^{-\lambda_i})^2 + (1 - e^{-\varphi_i})^2}.$$

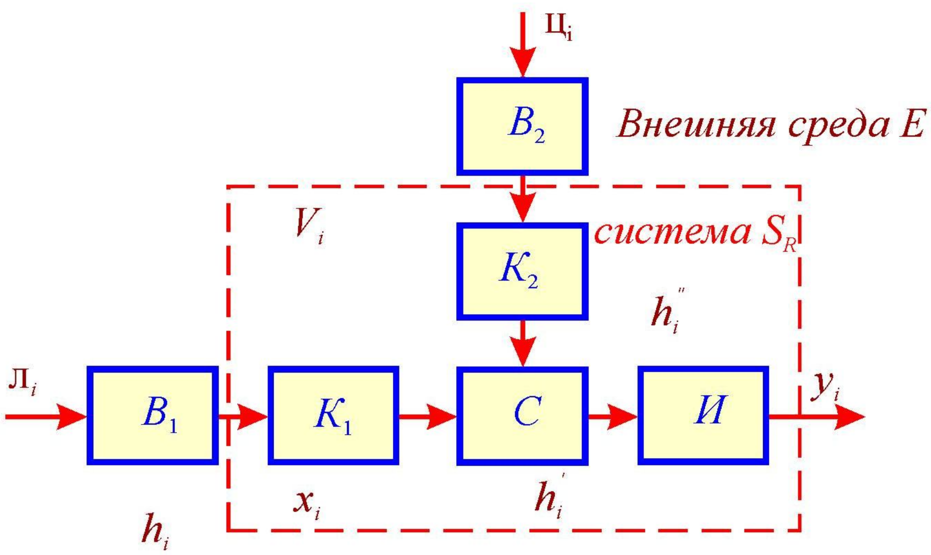


Рис. 4.1. Структурная схема системы S_R

Схема алгоритма, реализующего метод статистического моделирования для оценки $M[y]$ системы S_R, приведена на рис. 4.2. Здесь LA и FI — функции распределения случайных величин λ и φ; N — заданное число реализаций; $I \equiv i$ – номер текущей реализации; $LAI \equiv \lambda_i$; $FII \equiv \varphi_i$; $EXP \equiv e$; $MY \equiv M[y]$, $SY \equiv \sum_{i=1}^{N} y_i$ — суммирующая ячейка; *ВИД*[…], *ГЕН*[…], *ВРМ*[…] — процедуры ввода исходных данных, генерации псевдослучайных последовательностей и выдачи результатов моделирования, соответственно.

Таким образом, данная модель позволяет получить методом статистического моделирования на ЭВМ статистическую оценку математического ожидания выходной характеристики $M[y]$ рассмотренной стохастической системы S_R. Точность и достоверность результатов взаимодействия будут определяться числом реализаций N.

Пример 4.2. Необходимо методом статистического моделирования найти оценку площади фигуры (рис. 4.3), ограниченной осями координат, ординатой α = 1 и кривой $y = f(\alpha)$; при этом для определённости предполагается, что $0 \le f(\alpha) \le 1$ для всех α, $0 \le \alpha \le 1$.

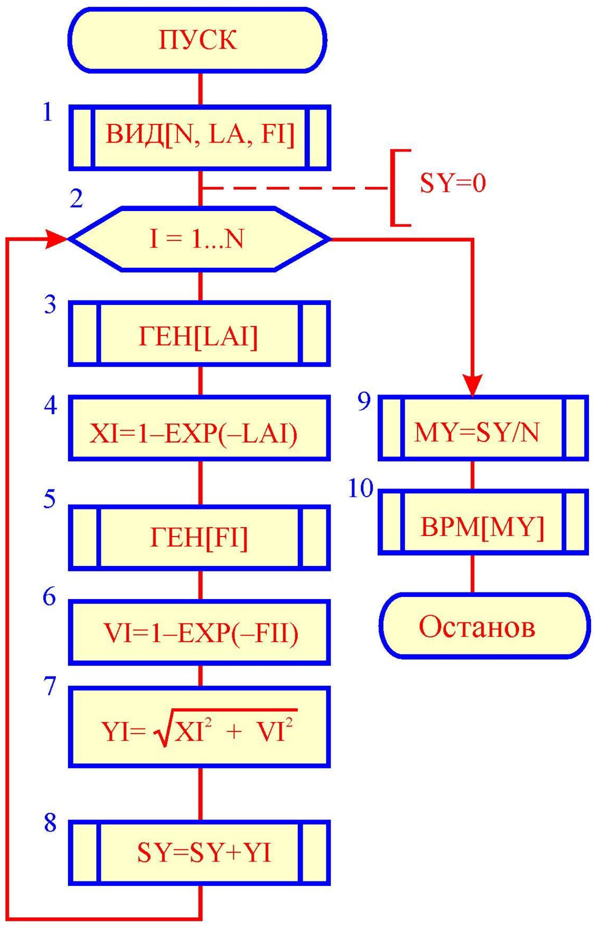


Рис. 4.2. Схема моделирующего алгоритма системы S_R

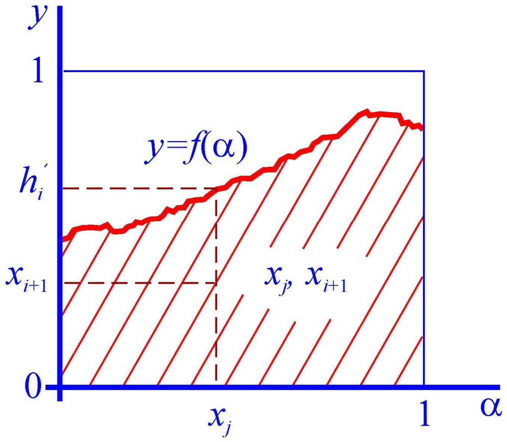


Рис. 4.3. Геометрическая интерпретация оценки площади фигуры

Таким образом, данная задача является чисто детерминированной и её аналитическое решение сводится к вычислению определённого интеграла, т.е. искомая площадь фигуры

$$S_\phi = \int_0^{\alpha_1} f(\alpha)d\alpha \; .$$

Для решения этой детерминированной задачи методом статистического моделирования необходимо построить адекватную стохастическую систему S_D, оценки характеристик которой будут совпадать с искомыми в данной детерминированной задаче.

Вариант структурной схемы такой системы S_D показан на рис. 4.4, где элементы выполняют следующие функции:

– вычисление B_1: $h_i' = f(x_i)$;

– анализ A: $h_i = \begin{cases} 1, \text{ если } x_{j+1} \leq f(x_i), \\ 0; \end{cases}$

– суммирование C: $h' = \sum_{i=1}^{N} h_i$;

– вычисление B_2: $S = h'/N$.

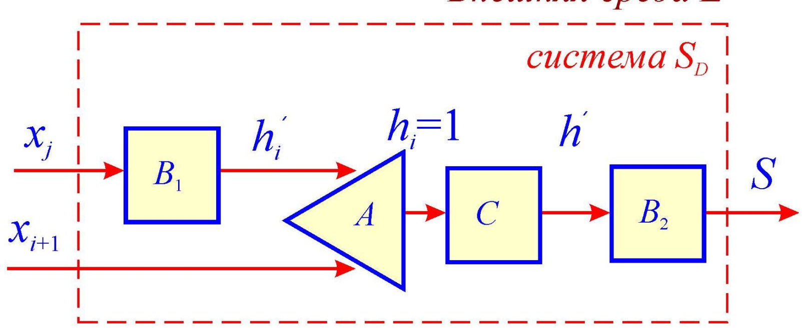


Рис. 4.4. Структурная схема системы S_D

Система S_D функционирует следующим образом: получается пара независимых случайных чисел интервала (0, 1), определяется координата точки (x_i, x_{i+1}), показанной на рис.4.3, вычисляется координата $x_{i+1} = f(x_i)$ и проводится сравнение величин x_{i+1} и x_{i+1}; причём если точка (x_i, x_{i+1}) попала в площадь фигуры (в том числе и на кривую $f(x)$), то исход испытания считается положительным, $h_i = 1$, и в итоге можно получить статистическую оценку площади фигуры $S_ф$ по заданному числу реализаций N.

Логическая схема моделирующего алгоритма вероятностной системы S_D представлена на рис. 4.5.

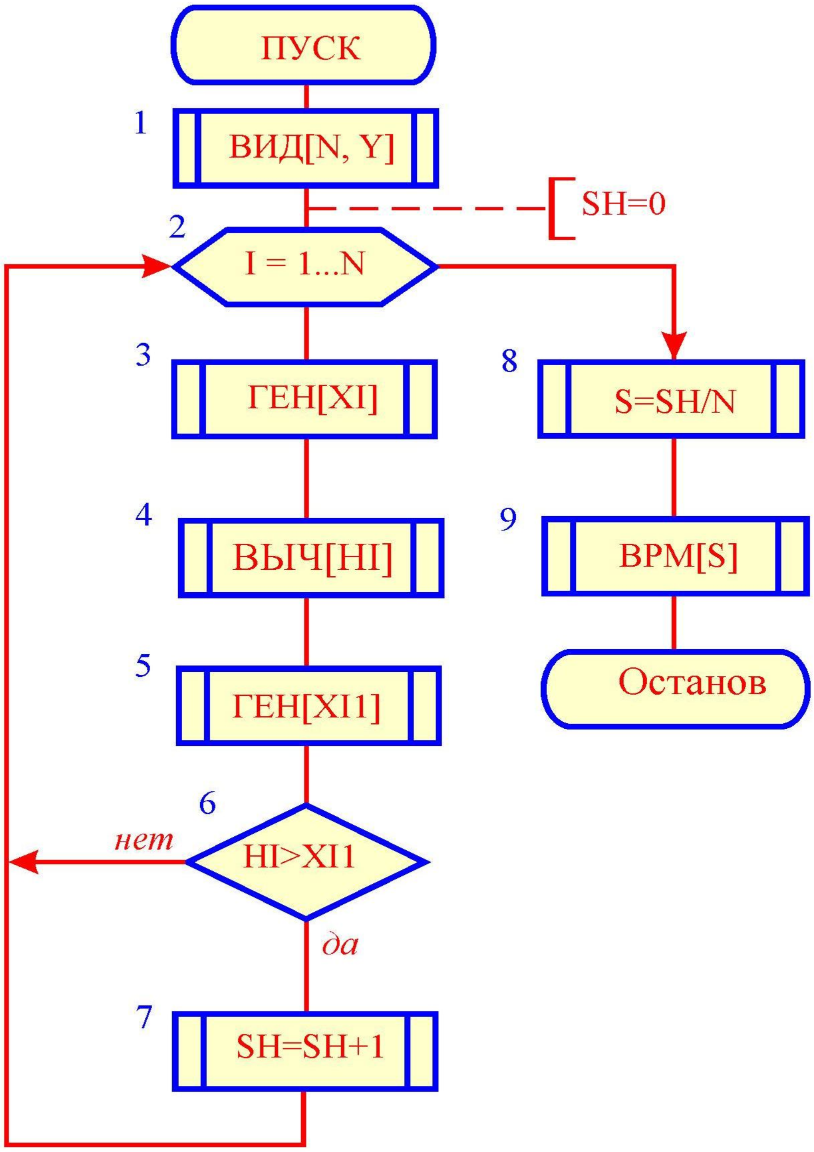


Рис. 4.5. Схема моделирующего алгоритма системы S_D

Здесь $Y \equiv y = f(\alpha)$ — заданная функция (табличная кривая); N — заданное число реализаций; $I \equiv i$ — номер текущей реализации; $XI \equiv x_i$, $XI1 \equiv x_{i+1}$, $HI \equiv h_i$, $S \equiv s$, $SH \equiv h' = \sum_{i=1}^{N} h_i$ — суммирующая ячейка.

Таким образом, построение некоторой стохастической системы S_D позволяет методом статистического моделирования получить оценки для детерминированной задачи.

Пример 4.3. Необходимо методом статистического моделирования решить следующую задачу. Проводится $s = 10$ независимых выстрелов по мишени, причём вероятность попадания при одном выстреле задана и равна p. Требуется оценить вероятность того, что число попадания в мишень будет чётным, т.е. 0, 2, 4, 6, 8, 10.

Данная задача является вероятностной, причём существует её аналитическое решение:

$$P = \sum_{k=0}^{5} C_{10}^{2k} p^{2k} (1-p)^{10-2k} .$$

В качестве объекта статистического моделирования можно рассмотреть следующую вероятностную систему S_P, структура которой представлена на рис. 4.6, где элементы выполняют такие функции:

– анализ A_1: $h_i = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i < p, \\ 0; \end{cases}$

– суммирование C: $h_j = \sum_{i=1}^{10} h_i, \ j = \overline{1, N};$

– анализ A_2: $y_j = \begin{cases} 1, \text{ если } h_j - \text{четное}, \\ 0. \end{cases}$

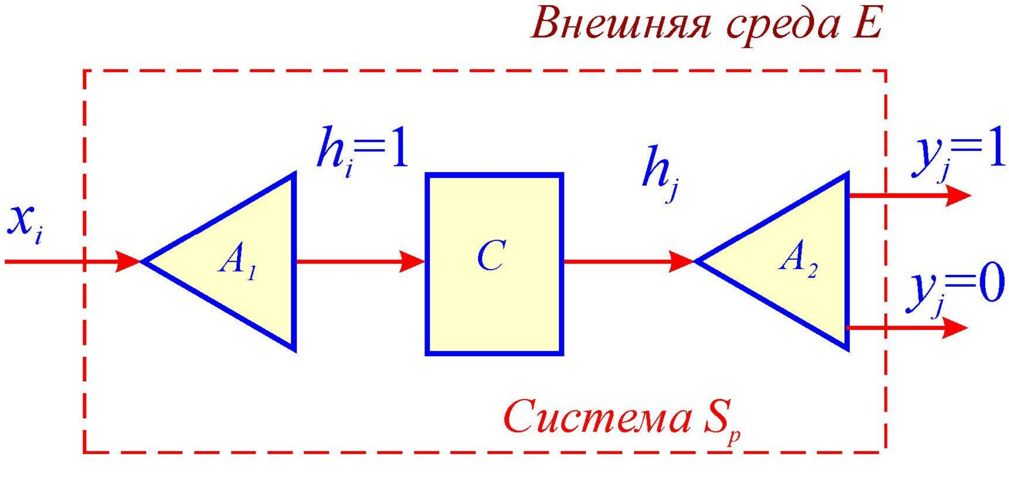


Рис. 4.6. Структурная схема системы S_P

Выходным воздействием в данной системе S_P является событие чётного числа попаданий в мишень в серии из десяти выстрелов. В качестве оценки выходной характеристики необходимо при числе испытаний (серий выстрелов), равном N, найти вероятность чётного числа попаданий:

$$P(y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j \,.$$

Логическая схема алгоритма статистического моделирования для оценки искомой характеристики такой системы $P(y)$ приведена на рис. 4.7. Здесь $P \equiv p$ — заданная вероятность попадания в мишень при одном выстреле;

N — заданное число реализаций;

$XI \equiv x_i$, $HJ \equiv h_{j=} \sum_{j=1}^{10} h_j$, $PY \equiv P(y)$, $SY \equiv \sum_{j=1}^{10} y_j$ — суммирующая ячейка.

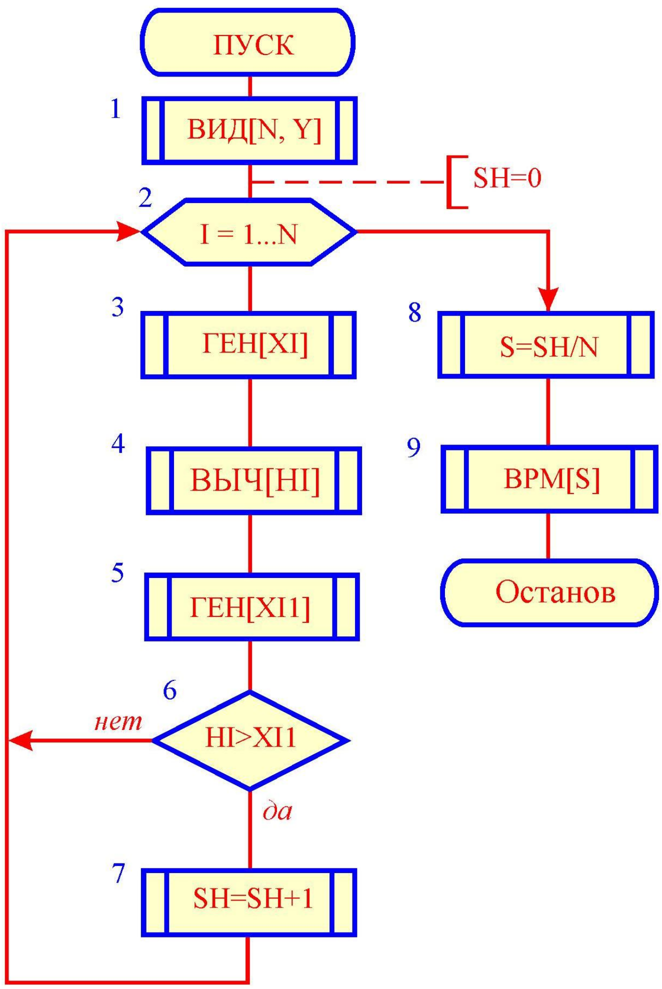


Рис. 4.7. Схема моделирующего алгоритма системы S_P

В данном моделирующем алгоритме после ввода исходных данных и реализации операторов цикла происходит обращение к генератору случайных чисел, т.е. получаются значения x_i случайной величины, которые равномерно распределены в интервале (0, 1). Вероятность попадания случайной величины в интервал $(0, p)$, где $p \leq 1$, равна длине этого отрезка, т.е. $P\{x_i < p\} = p$. Поэтому при каждом моделировании выстрела полученное случайное число $\tilde{o}_i$ сравнивается с заданной вероятностью p и при $x_i < p$ регистрируется «попадание в мишень», а в противном случае — «промах». Далее моделируются серии из десяти испытаний каждая, подсчитывается чётное число «попаданий» в каждой серии и находится статистическая оценка искомой характеристики $P(y)$.

Таким образом, подход при использовании статистического моделирования независимого от природы объекта исследования (будет ли он детерминированным или стохастическим) является общим, причём при статистическом моделировании детерминированных систем (система S_D в примере 4.2) необходимо предварительно построить стохастическую систему, выходные характеристики которой позволяют оценить искомые.

Отметим, что во всех рассмотренных примерах не требуется запоминания всего множества генерируемых случайных чисел, не используемых при статистическом моделировании системы S. Запоминается только накопленная сумма исходов и общее число реализаций.

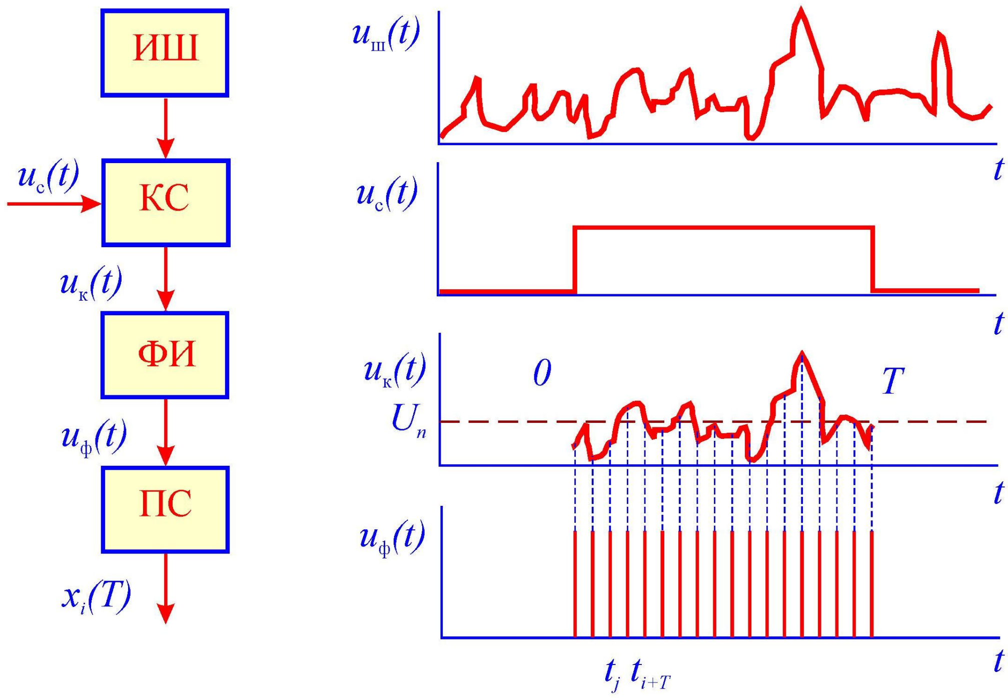
4.2. Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации

Способы генерации случайных чисел. При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество случайных чисел колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных (базовых) последовательностей случайных чисел.

На практике используется три основных способа генерации случайных чисел: аппаратный (физический), табличный (файловый) и алгоритмический (программный).

При *аппаратном* способе генерации случайные числа вырабатываются специальной электронной приставкой — генератором (датчиком) случайных чисел, служащей в качестве одного из внешних устройств ЭВМ. Таким образом, реализация этого способа генерации не требует дополнительных вычислительных операций ЭВМ по выработке случайных чисел, а необходима только операция обращения к внешнему устройству (датчику). В качестве физического эффекта, лежащего в основе таких генераторов чисел, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах.

Структурная схема аппаратного генератора случайных чисел приведена на рис. 4.8, *а*.



а *б*

Рис. 4.8. Аппаратный способ получения случайных чисел:
а – структурная схема элементов генератора;
б – сигналы элементов генератора;
ИШ — источник шума; *КС* — ключевая схема;
ФИ — формирователь импульсов; *ПС* — пересчетная схема

При усилении шумов на выходе *ИШ* получается напряжение $u_ш(t)$, которое является случайным процессом, показанным на временной диаграмме (рис. 4.8, *б*). Причем отрезок шумовой реализации $u_к(t)$, сформированный на интервале времени (0, *T*) с помощью *КС*, содержит случайное число выбросов. Сравнение напряжения $u_к(t)$ с пороговым U_n позволяет сформировать на выходе *ФИ* серию импульсов $u_ф(t)$. Тогда на выходе *ПС* может быть получена последовательность случайных чисел $x_i(t)$. Аппаратный способ получения случайных чисел не позволяет гарантировать качество последовательности непосредственно во время моделирования системы *S* на ЭВМ, а также повторно получать при моделировании одинаковые последовательности чисел.

Если случайные числа, оформленные в виде таблицы, помещать во внешнюю или оперативную память ЭВМ, предварительно сформировав из них соответствующий файл (массив чисел), то такой способ будет называться *табличным*. Этот способ рационально использовать при сравнительно небольшом объеме таблицы и, соответственно, файла чисел, тогда для хранения можно применять оперативную память. Хранение файла во внешней памяти вызывает увеличение затрат машинного времени

Алгоритмический способ получения последовательностей случайных чисел основан на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. Каждое случайное число вычисляется с помощью соответствующей программы по мере возникновения потребностей при моделировании системы на ЭВМ.

Достоинства и недостатки трех перечисленных способов получения случайных чисел для сравнения представлены в табл. 4.1. Из этой таблицы видно, что алгоритмический способ получения случайных чисел наиболее рационален на практике при моделировании систем на универсальных ЭВМ.

Таблица 4.1

Способ	Достоинства	Недостатки
Аппаратный	Запас чисел не ограничен. Расходуется мало операций вычислительной машины. Не занимает место в памяти машины	Требуется периодическая проверка. Нельзя воспроизводить последовательности. Используется специальное устройство. Необходимы меры по обеспечению стабильности
Табличный	Требуется однократная проверка. Можно воспроизводить последовательности	Запас чисел ограничен. Занимает много места в оперативной памяти или необходимо время на обращение к внешней памяти
Алгоритмический	Требуется однократная проверка. Можно многократно воспроизводить последовательности чисел. Занимает мало места в памяти машины. Не используются внешние устройства	Запас чисел последовательности ограничен ее периодом. Существенные затраты машинного времени

Генерация базовой последовательности. При моделировании систем на ЭВМ программная имитация случайных воздействий любой сложности сводится к генерированию некоторых стандартных (базовых) процессов и к их последующему функциональному преобразованию. При дискретном моделировании базовым процессом является последовательность чисел $\{x_i\} = x_0, x_1, \ldots, x_N$, представляющих собой реализации независимых, равномерно распределенных на интервале (0, 1) случайных величин $\{\xi_i\} = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$ или в статистических терминах — повторную выборку из равномерно распределенной на (0, 1) генеральной совокупности значений величины ξ.

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале (a, b), если ее функции распределения (рис. 4.9, *а*) и плотности (рис. 4.9, *б*) соответственно примут вид

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), a \le x \le b, \\ 0, x < a, x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ (x-a)/(b-a), a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$$

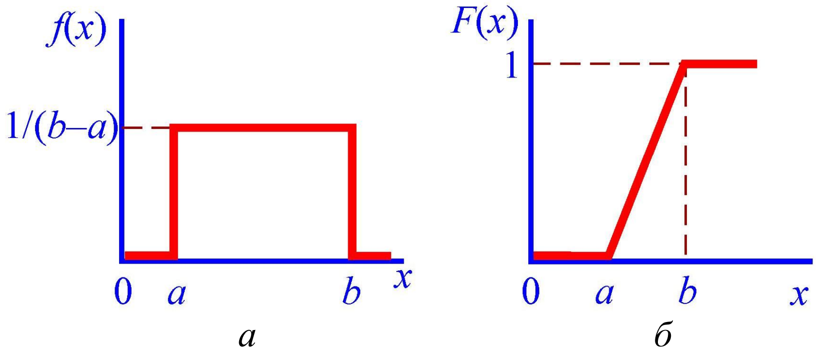


Рис.4.9. Равномерное распределение случайной величины

Числовые характеристики случайной величины ξ, принимающей значения x, — математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение, соответственно:

$$M[\xi] = \int_a^b xf(x)\,dx = \int_a^b xdx/(b-a) = (a+b)/2; \qquad (4.7)$$

$$D[\xi] = \int_a^b (x - M[\xi])^2 f(x)\, dx = (b-a)^2/12;$$

$$\sigma_\xi = +\sqrt{D[\xi]} = (b-a)/(2\sqrt{3}).$$

При моделировании систем на ЭВМ применяется частный случай равномерного распределения, когда случайные числа находятся на интервале (0, 1), т.е. границы интервала $a = 0$ и $b = 1$. Функции плотности и распределения имеют вид, соответственно:

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le 1, \\ 0, x < 0, x > 1; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x, 0 \le x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Такое распределение имеет математическое ожидание $M[\xi] = 1/2$ и дисперсию $D[\xi] = 1/12$.

Получить такое распределение на цифровой ЭВМ невозможно, так как машина оперирует с n-разрядными числами. Поэтому на ЭВМ вместо непрерывной совокупности равномерных случайных чисел интервала (0, 1) используют дискретную последовательность 2^n случайных чисел того же интервала. Закон распределения такой дискретной последовательности называют *квазиравномерным распределением.*

Случайная величина ξ, имеющая квазиравномерное распределение в интервале (0, 1), принимает значения $x_i = i/(2^n - 1)$ с вероятностями $p_i = 1/2^n$, $i = \overline{0, 2^n - 1}$.

Математическое ожидание и дисперсия квазиравномерной случайной величины имеют вид, соответственно:

$$M[\xi] = \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{i}{(2^n - 1)} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(2^n - 1)2^n} \sum_{i=0}^{\gamma-1} i = \frac{(2^n - 1)2^n}{(2^n - 1)2^n 2} = \frac{1}{2};$$

$$D[\xi] = \sum_{i=0}^{\gamma-1} \frac{1}{2^n} \left[\frac{i}{2^n - 1} - \frac{1}{2} \right]^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\gamma-1} \left(\frac{i^2}{(2^n - 1)^2} - \frac{i}{2^n - 1} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{(2^n - 1)2^n (2^{n+1} - 1)}{6(2^n - 1)^2} - \frac{(2^n - 1)2^n}{(2^n - 1)2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12} \frac{2^n + 1}{2^n - 1}.$$

Таким образом, математическое ожидание квазиравномерной случайной величины совпадает с математическим ожиданием равномерной случайной последовательности интервала (0, 1), а дисперсия отличается только множителем $(2^n + 1)/(2^n - 1)$, который при достаточно больших n близок к единице.

На ЭВМ невозможно получить идеальную последовательность случайных чисел хотя бы потому, что на ней можно оперировать только с конечным множеством чисел. Для получения значений x случайной величины ξ используются формулы (алгоритмы), т.е. эти последовательности детерминированы и называются *псевдослучайными*.

Требования к генератору случайных чисел. Полученные с помощью идеального генератора псевдослучайные последовательности чисел должны:

- состоять из квазиравномерно распределенных чисел;
- содержать статистически независимые числа;
- быть воспроизводимыми;
- иметь неповторяющиеся числа;
- получаться с минимальными затратами машинного времени;
- занимать минимальный объем машинной памяти.

Обычно для генерации последовательностей псевдослучайных чисел при моделировании на ЭВМ применяются алгоритмы вида

$$x_{i-1} = \Phi(x_i), \tag{4.9}$$

представляющие собой *рекуррентные соотношения* первого порядка, для которых начальное число x_0 и постоянные параметры заданы.

Рассмотрим две процедуры получения последовательностей псевдослучайных квазиравномерно распределенных чисел при статистическом моделировании систем на ЭВМ.

Первой процедурой получения псевдослучайных чисел была процедура – *метод серединных квадратов*, заключающаяся в следующем. Пусть имеется $2n$-разрядное число, меньше 1: $x_i = 0{,}a_1a_2\ldots a_{2n}$. Возведем его в квадрат: $x_i^2 = 0{,}b_1b_2\ldots b_{4n}$, затем отберем средние $2n$ разрядов $x_{i+1} = 0{,}b_{n+1}b_{n+2}\ldots b_{3n}$, которые будут являться очередным числом псевдослучайной последовательности. Например, если начальное число $x_0 = 0{,}2152$, то $(x_0)^2 = 0{,}04631104$, т.е. $x_1 = 0{,}6311$, затем $(x_1)^2 = 0{,}39828721$, т.е. $x_2 = 0{,}8287$, и т.д. Недостаток этого метода – наличие корреляции между периодами последовательности, а в ряде случаев случайность вообще может отсутствовать. Например, если $x_0 = 0{,}4500$, то $(x_0)^2 = 0{,}20250000$, $x_1 = 0{,}2500$, $(x_1)^2 = 0{,}06250000$, $x_2 = 0{,}2500$, $(x_2)^2 = 0{,}06250000$, $x_3 = 0{,}2500$ и т.д.

Вторая *конгруэнтная процедура* генерации псевдослучайных последовательностей представляет собой арифметические операции, в основе которых лежит фундаментальное понятие конгруэнтности. Два целых числа α и β конгруэнтны (сравнимы) по модулю m, где m — целое число, тогда и только тогда, когда существует такое целое число k, что $\alpha - \beta = km$, т.е. если разность $\alpha - \beta$ делится на m и если числа α и β дают одинаковые остатки от деления на абсолютную величину числа m. Например, $1984 \equiv 4 \pmod{10}$, $5008 \equiv 8 \pmod{10^3}$ и т.д.

Конгруэнтные процедуры являются чисто детерминированными, так как описываются в виде рекуррентного соотношения, когда функция (4.9) имеет вид:

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu (\mathrm{mod}\ M), \tag{4.10}$$

где X_{i+1}, λ, μ, M — неотрицательные целые числа.

Раскроем рекуррентное соотношение (4.10):

$$X_1 = \lambda X_0 + \mu (\mathrm{mod}\ M);$$
$$X_2 = \lambda X_1 + \mu = \lambda^2 X_0 + (\lambda + 1)\mu (\mathrm{mod}\ M);$$
$$X_3 = \lambda X_2 + \mu = \lambda^3 X_0 + (\lambda^2 + \lambda + 1)\mu = \lambda^3 X_0 + (\lambda^3 - 1)\mu/(\lambda - 1)(\mathrm{mod}\ M);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_i = \lambda^i X_0 + (\lambda^i - 1)\mu/(\lambda - 1)(\mathrm{mod}\ M). \tag{4.11}$$

Если заданы начальное значение X_0, множитель λ и аддитивная константа μ, то (4.11) однозначно определяет последовательность целых чисел $\{X_i\}$, составленную из остатков от деления на M членов последовательности $\{\lambda^i X_0 + (\lambda^i - 1)/(\lambda - 1)\}$. Таким образом, для любого $i \geq 1$ справедливо неравенство $X_i < M$. По целым числам последовательности $\{X_i\}$ можно построить последовательность $\{x_i\} = \{X_i/M\}$ рациональных чисел из единичного интервала (0, 1). В настоящее время почти все пакеты прикладных программ универсальных ЭВМ для вычисления последовательностей равномерно распределённых случайных чисел основаны на конгруэнтной процедуре.

4.3. Проверка и улучшение качества последовательностей псевдослучайных чисел

Проверка качества последовательностей. Результаты моделирования системы S, полученные методом статистического моделирования на ЭВМ, существенно зависят от качества используемых псевдослучайных квазиравномерных последовательностей чисел. Поэтому все применяемые генераторы случайных чисел должны пройти перед моделированием системы предварительное тестирование, которое представляет собой комплекс проверок по различным стохастическим критериям, включая в качестве основных проверки (тесты) на равномерность, стохастичность и независимость.

Проверка равномерности последовательностей псевдослучайных квазиравномерно распределённых чисел $\{x_i\}$ может быть выполнена по гистограмме с присваиванием косвенных признаков. Суть проверки по гистограмме сводится к следующему. Выдвигается гипотеза о равномерности распределения чисел (0, 1). Затем интервал (0, 1) разбивается на m равных частей, тогда при генерации последовательности $\{x_i\}$ каждое из чисел x_i с вероятностью $p_j = 1/m$, $j = \overline{1, m}$ попадет в один из подынтервалов. Всего в каждый j-й подынтервал попадает N_i чисел последовательности $\{x_i\}$, $i = \overline{1, N}$, причём $N = \sum_{j=1}^{m} N_j$. Относительная частота попадания случайных чисел из последовательности $\{x_i\}$ в каждый из подынтервалов будет равна N_j/N. Очевидно, что если числа x_i принадлежат псевдослучайной квазиравномерно распределённой последовательности, то при достаточно больших N экспериментальная гистограмма (ломаная линия на рис. 4.10, *а*) приближается к теоретической прямой $1/m$.

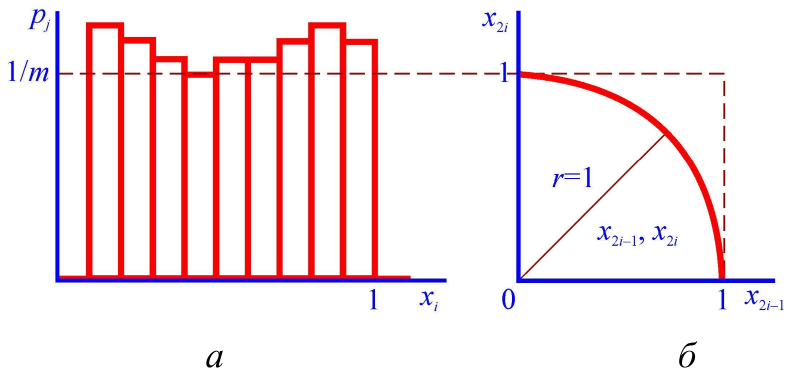


Рис. 4.10. Проверка равномерности последовательности
а – гистограмма; *б* – теоретическая кривая

Оценка степени приближения, т.е. равномерности последовательности $\{x_i\}$, может быть проведена с использованием критериев согласия. На практике принимается $m = 20 \div 50$, $N = (10^2 \div 10^3)m$.

Суть проверки равномерности по косвенным признакам сводится к следующему. Генерируемая последовательность $\{x_i\}$ разбивается на две последовательности:

$$x_1, x_3, x_5, x_{2i\text{-}1};$$

$$x_2, x_4, x_6, x_{2i}, i = \overline{1, N}.$$

Затем проводится следующий эксперимент. Если выполняется условие:

$$x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 < 1,\ i = \overline{1, N}, \tag{4.12}$$

то фиксируется наступление некоторого события и в счётчик событий добавляется единица. После $N/2$ опытов, когда генерировано N число, в счётчике будет некоторое число $k \le N/2$.

Геометрически условие (4.12) означает, что точка (x_{2i-1}, x_{2i}), $i = \overline{1, N}$, находится внутри круга радиусом $r = 1$, что иллюстрирует рис. 4.11, *б*. В общем случае точка (x_{2i-1}, x_{2i}) всегда попадает внутрь квадрата. Тогда теоретическая возможность попадания этой точки в четверть круга:

$$p_k = S_{1/4\text{круга}}/S_{\text{квадрата}} = (\pi r^2/4)/(1\cdot 1) = \pi/4.$$

Если числа последовательности $\{x_i\}$ равномерны, то в силу закона больших чисел теории вероятностей при больших N относительная частота $2k/N \to \pi/4$.

Проверка стохастичности последовательности псевдослучайных чисел $\{x_i\}$ наиболее часто проводится методами комбинаций и серий. Сущность метода сводится к определению закона распределения длин участков между единицами (нулями) или закона распределения (появления) числа единиц (нулей) в n-разрядном двоичном числе X_i.

Теоретически закон появления j единиц в l разрядах двоичного числа X_i описывается, исходя из независимости отдельных разрядов, биномиальным законом распределения:

$$P(j, l) = C_l^j p^j(1)\,[1 - p(1)]^{l-j} = C_l^j p^l(1),$$

где $P(j, l)$ — вероятность появления j единиц в l разрядах числа X_i;

$p(1) = p(0) = 0{,}5$ — вероятность появления единицы и нуля в любом разряде числа X_i; $C_l^j = l! \,/\, [j! \,/\, (1 - j)!]$.

Тогда при фиксированной точке выборки N теоретически ожидаемое число появления случайных чисел X_i с j единицами в проверяемых l разрядах будет равно $n_j = NC_l^j p^l(1)$.

После нахождения теоретических и экспериментальных вероятностей $P(j, l)$ или чисел n_j при различных значениях $l \le n$ гипотеза о стохастичности проверяется с использованием критериев согласия.

При анализе стохастичности последовательности чисел $\{x_i\}$ методом серий последовательность разбивается на элементы первого и второго рода (a и b), т.е.

$$x_i = \begin{cases} a, \text{ если } x_i < p, \\ b, \end{cases}$$

где $0 < p < 1$.

Серией называется отрезок последовательности $\{x_i\}$, состоящий из идущих друг за другом элементов одного и того же рода. Причём число элементов в отрезке (a или b) называется *длиной серии.*

После разбиения последовательности $\{x_i\}$ на серии первого и второго рода будем иметь, например, серию вида

$$.....aabbbbaaabbbaabbab.... .$$

Так как случайные числа a и b в данной последовательности независимы и принадлежат последовательности $\{x_i\}$, равномерно распределённой на интервале (0, 1), то теоретическая вероятность появления серии длиной j в N опытах (под опытом здесь понимается генерация числа x_i и проверка условия $x_i < p$) определится формулой Бернулли:

$$P(j, l) = C_l^j p(1-p)^{l-j}, \qquad j = \overline{0,l},\ l = \overline{1,n}.$$

В случае экспериментальной проверки оцениваются частоты появления серий длиной j. В результате получаются экспериментальная и теоретическая зависимости $P(j, l)$, сходимость которых проверяется по известным критериям, причём проверку целесообразно проводить при разных значениях p, $0 < p < 1$ и l.

Проверка независимости элементов последовательности псевдослучайных квазиравномерно распределённых чисел $\{x_i\}$ производится на основе корреляционного момента.

Случайные величины ξ и η называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Таким образом, независимость элементов последовательности $\{x_i\}$ может быть проверена путём введения в рассмотрение последовательности $\{y_j\} = \{x_{i+\tau}\}$, где τ — величина сдвига последовательностей.

В общем случае корреляционный момент дискретных случайных величин ξ и η с возможными значениями y_j и x_i определяется по формуле

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j (x_i - M[\xi])(y_j - M[\eta]) p_{ij},$$

где p_{ij} — вероятность того, что (ξ, η) примет значение (x_i, y_j).

Корреляционный момент характеризует рассеивание случайных величин ξ и η и их зависимость. Если случайные числа независимы, то $K_{\xi\eta} = 0$. Коэффициент корреляции:

$$\overline{\rho}_{\xi\eta} = K_{\xi\eta}/(\sigma_x \sigma_y),$$

где σ_x и σ_y — среднеквадратические отклонения величин ξ и η.

При проведении оценок коэффициента корреляции на ЭВМ удобно для вычисления использовать следующее выражение:

$$\overline{\rho}_{\xi\eta}(\tau) = \frac{\dfrac{1}{N-\tau}\sum\limits_{i=1}^{N-\tau} x_i x_{i+\tau} - \dfrac{1}{(N-\tau)^2}\sum\limits_{i=1}^{N-\tau} x_i \sum\limits_{i=1}^{N-i} x_{i+\tau}}{\sqrt{D[x_i]D[x_{i+\tau}]}},$$

где

$$D[x_i] = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i^2 - \frac{1}{(N-\tau)^2}\left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i\right)^2,$$

$$D[x_{i+\tau}] = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}^2 - \frac{1}{(N-\tau)^2}\left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}\right)^2.$$

При вычислениях сначала рационально определить суммы:

$$\sum_i x_i, \quad \sum_i x_{i+\tau}, \quad \sum_i x_i x_{i+\tau}, \quad \sum_i x_i^2, \quad \sum_i x_{i+\tau}^2.$$

При любом $\tau \neq 0$ для достаточно больших N с доверительной вероятностью β справедливо соотношение

$$\left|\overline{\rho}_{\xi\eta}(\tau)\right| \leq \beta\sqrt{\frac{1}{N}}.$$

Если найденное эмпирическое значение $\overline{\rho}_{\xi\eta}(\tau)$ находится в указанных пределах, то с вероятностью β можно утверждать, что полученная последовательность чисел $\{x_i\}$ удовлетворяет гипотезе корреляционной независимости.

Характеристики качества генераторов. При статистическом моделировании системы S с использованием программных генераторов псевдослучайных квазиравномерных последовательностей важными характеристиками качества генератора является *длина периода P и длина отрезка апериодичности L.* Длина отрезка апериодичности L псевдослучайной последовательности $\{x_i\}$, заданной уравнением

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu \ (\mathrm{mod}\ M),\ x_i = X_i/M,$$

есть наибольшее целое число, такое, что при $0<j<i<L$ событие $P\{x_i=x_j\}$ не имеет места, т.е. все числа x в пределах отрезка апериодичности не повторяются.

Если длина последовательности чисел $\{x_i\}$ больше отрезка апериодичности L, то повторение испытаний происходит в тех же условиях, что и раньше, т.е. увеличение числа реализации не дает новых статистических результатов.

4.4. Моделирование случайных воздействий на систему

Моделирование случайных событий. Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании систем являются *случайные события*. Рассмотрим особенности их моделирования.

Пусть имеются случайные числа x_i, т.е. возможные значения случайной величины ξ, равномерно распределенной в интервале (0, 1). Необходимо реализовать случайное событие A, наступающее с заданной вероятностью p. Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины ξ удовлетворяет неравенству

$$x_i \le p. \tag{4.13}$$

Тогда вероятность события A будет $P(A) = \int_0^p dx = p$. Противоположное событие $\overline{A}$ состоит в том, что $x_i > p$. Тогда $P(\overline{A})=1-p$.

Процедура моделирования в этом случае состоит в выборе значений x_i и сравнении их с p. При этом, если условие (4.13) выполняется, исходом испытания является событие A.

Таким же образом можно рассмотреть группу событий. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_s$ — полная группа событий, наступающих с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_s$, соответственно. Определим A_m как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины ξ. удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} < x_i \le l_m, \tag{4.14}$$

где $l_r = \sum_{i=1}^{r} p_i$. Тогда

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = p_m.$$

Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательном сравнении случайных чисел x_i со значениями l_r. Исходом испытания оказывается событие A_m, если выполняется условие (4.14). Эту процедуру называют определением исхода испытания *по жребию* в соответствии с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

При моделировании на ЭВМ используются псевдослучайные числа с квазиравномерным распределением, что приводит к некоторой ошибке.

При моделировании систем искомый результат может быть сложным событием, зависящим от двух (и более) простых событий. Пусть, например, независимые события A и B имеют вероятность поступления p_A и p_B. Возможными исходами совместных испытаний в этом случае будут события AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{AB}$ с вероятностью p_A, p_B, $(1-p_A)p_B$, $p_A(1-p_B)$, $(1-p_A)(1-p_B)$.

Для моделирования совместных испытаний можно использовать два варианта процедуры: 1) последовательную проверку условия (4.13); 2) определение одного из исходов AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{AB}$ по жребию с соответствующими вероятностями, т.е. аналогия (4.14). Первый вариант требует двух чисел x_i и сравнений для проверки условия (4.14). При втором варианте можно обойтись одним числом x_i, но сравнений может потребоваться больше. С точки зрения удобства построения моделирующего алгоритма и экономии количества операций и памяти ЭВМ более предпочтительней первый вариант.

Рассмотрим теперь случай, когда события A или B являются зависимыми и наступают с вероятностями p_A и p_B. Обозначим через $P(B/A)$ условную вероятность наступления события B при условии, что событие A произошло. При этом считаем, что условная вероятность $P(B/A)$ задана.

Рассмотрим один из вариантов построения модели. Из последовательности случайных чисел $\{x_i\}$ извлекается очередное число x_m и проверяется справедливость неравенства $x_m < p_A$. Если это неравенство справедливо, то наступило событие A. Для испытания, связанного с событием B, используется вероятность $P(B/A)$. Из совокупности чисел $\{x_i\}$ берется очередное число x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1} \le P(B/A)$. В зависимости от того, выполняется или нет это неравенство, исходом испытания являются AB или $A\overline{B}$.

Если неравенство $x_m < p_A$ не выполняется, то наступило событие $\overline{A}$. Поэтому для испытания, связанного с событием B, необходимо определить вероятность

$$P(B/\overline{A}) = [P(B) - P(A)P(B/A)] \,/\, (1 - P(A)).$$

Выберем из совокупности $\{x_i\}$ число x_{m+1} и проверим справедливость неравенства $x_{m+1} \le P(B/\overline{A})$. В зависимости от того, выполняется оно или нет, получим исходы испытания $\overline{A}B$ или $\overline{A}\,\overline{B}$.

Логическая схема алгоритма для реализации этого варианта модели показана на рис. 4.11. Здесь *ВИД*[…] — процедура ввода исходных данных; *ГЕН*[...] — генератор равномерно распределенных случайных чисел; $XM \equiv x_m$; $XM1 \equiv x_{m+1}$; $PA \equiv p_A$; $PB \equiv p_B$; $PBA \equiv P(B/A)$; $PBNA \equiv P(B/\overline{A})$; *KA, KNA, KAB, KANB, KNAB, KNANB* – число событий A, $\overline{A}$, AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{A}\,\overline{B}$, соответственно; *ВРМ*[...] — процедура выдачи результатов моделирования.

Моделирование дискретных случайных величин. Рассмотрим особенности преобразования для случая получения *дискретных случайных величин*. Дискретная случайная величина η принимает значения $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_j \le \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$, составляющими дифференциальное распределение вероятностей:

$$\begin{array}{ll} y & y_1\ y_2 \ldots y_j \ldots \\ P(\eta = y) & p_1\, p_2 \ldots p_j \ldots \end{array} \tag{4.15}$$

При этом интегральная функция распределения

$$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = \sum_{j=1}^{m} p_j;\ y_m \le y_{m+1};\ m = 1, 2, \ldots,$$

$$F_\eta(y) = 0;\ y < y_1. \tag{4.16}$$

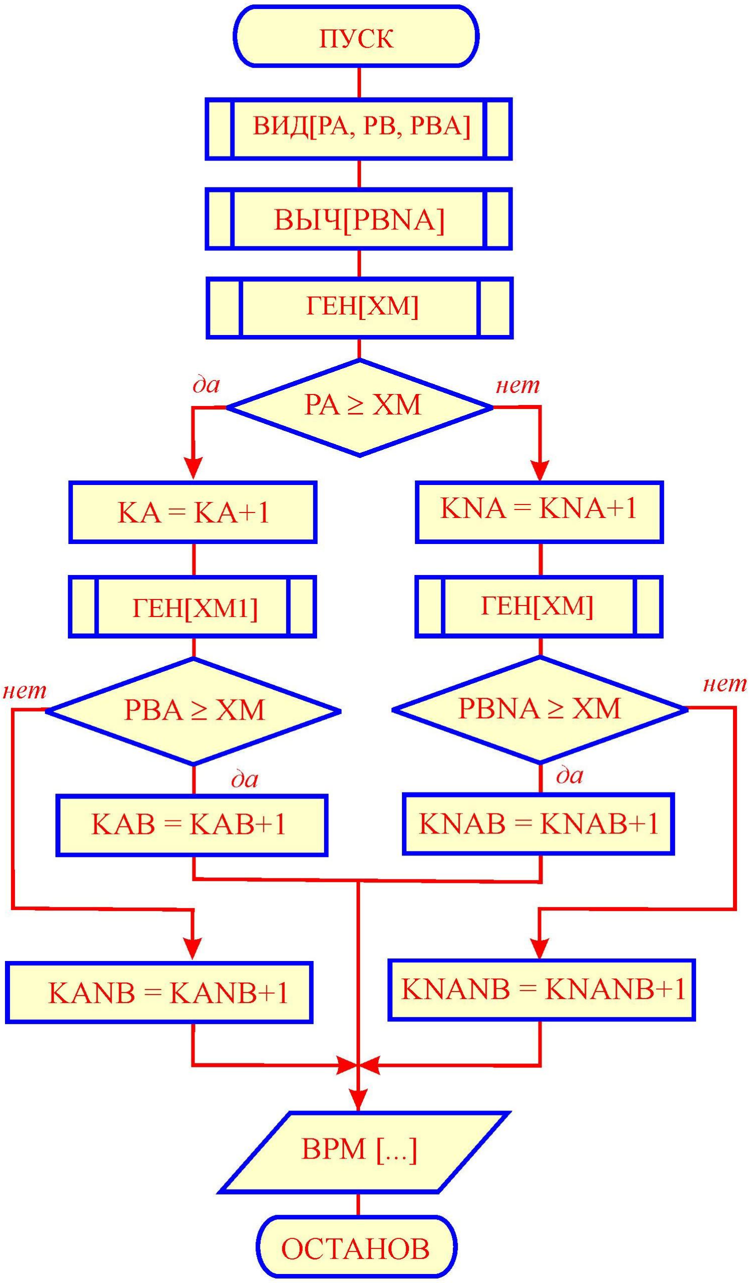


Рис. 4.11. Схема моделирующего алгоритма
при зависимых событиях

Для получения дискретных случайных величин можно использовать метод обратной функции. Если ξ — равномерно распределённая на интервале (0,1) случайная величина, то искомая случайная величина η получается с помощью преобразования

$$\eta = F_{\eta}^{-1}(\xi), \qquad (4.17)$$

где F_{η}^{-1} — функция, обратная F_{η}.

Алгоритм вычисления по (4.16) и (4.17) сводится к выполнению следующих действий:

если $x_1 < p_1$, то $\eta = y_1$, иначе,
если $x_2 < p_1 + p_2$, то $\eta = y_2$, иначе,
. . . .

$$\text{если } x_j < \sum_{j=1}^{m} p_j \text{, то } \eta = y_m. \tag{4.18}$$

При счете по (4.18) среднее число циклов сравнения $\overline{\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j$.

Моделирование непрерывных случайных величин. Рассмотрим особенности генерации на ЭВМ *непрерывных случайных величин*. Непрерывная случайная величина η задана интегральной функцией распределения

$$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = \int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)dy,$$

где $f_\eta(y)$ — плотность вероятностей.

Для получения непрерывных случайных величин с заданным законом распределения, как и для дискретных величин, можно воспользоваться методом обратной функции. Взаимно однозначная монотонная функция $\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$, полученная решением относительно η уравнения $F_\eta(y) = \xi$, преобразует равномерно распределенную на интервале (0, 1) величину ξ в η с требуемой плотностью $f_\eta(y)$.

Действительно, если случайная величина η имеет плотность распределения $f_\eta(y)$, то распределение случайной величины

$$\xi = \int_{0}^{\eta} f_\eta(y)dy$$

является равномерным в интервале (0, 1). На основании этого можно сделать следующий вывод. Чтобы получить число, принадлежащее последовательности случайных чисел $\{y_j\}$, имеющих функцию плотности $f_\eta(y)$, необходимо разрешить относительно y_j уравнение

$$\int_{-\infty}^{y_j} f_\eta(y)dy = x_i. \tag{4.19}$$

Рассмотрим некоторые примеры получения непрерывных случайных величин с заданным законом распределения на основе случайных чисел, имеющих равномерное распределение в интервале (0, 1), методом обратной функции.

Способ получения случайных чисел с заданным законом распределения имеет ограниченную сферу применения в практике моделирования систем на ЭВМ, что объясняется следующими обстоятельствами:

1) для многих законов распределения, встречающихся в практических задачах моделирования, интеграл (4.19) не берётся, т.е. приходится прибегать к численным методам решения, что увеличивает затраты машинного времени на получение каждого случайного числа;

2) даже для случаев, когда интеграл (4.19) берётся в конечном виде, получаются формулы, содержащие действия логарифмирования, извлечение корня и т.д., которые увеличивают затраты машинного времени на получение каждого случайного числа.

Поэтому в практике моделирования систем часто пользуются *приближёнными* способами преобразования случайных чисел, которые можно классифицировать следующим образом:

а) универсальные способы, с помощью которых можно получить случайные числа с законом распределения любого вида;

б) неуниверсальные способы, пригодные для получения случайных чисел с конкретным законом распределения.

Рассмотрим приближённый *универсальный* способ получения случайных чисел, основанный на кусочной аппроксимации функции плотности. Пусть требуется получить последовательность случайных чисел $\{y_j\}$ с функцией плотности $f_\eta(y)$, возможные значения которой лежат в интервале $(a,\ b)$. Представим $f_\eta(y)$ в виде кусочно-постоянной функции, т.е. разобьём интервал $(a,\ b)$ на m интервалов, как это показано на рис. 4.12, и будем считать $f_\eta(y)$ на каждом интервале постоянной.

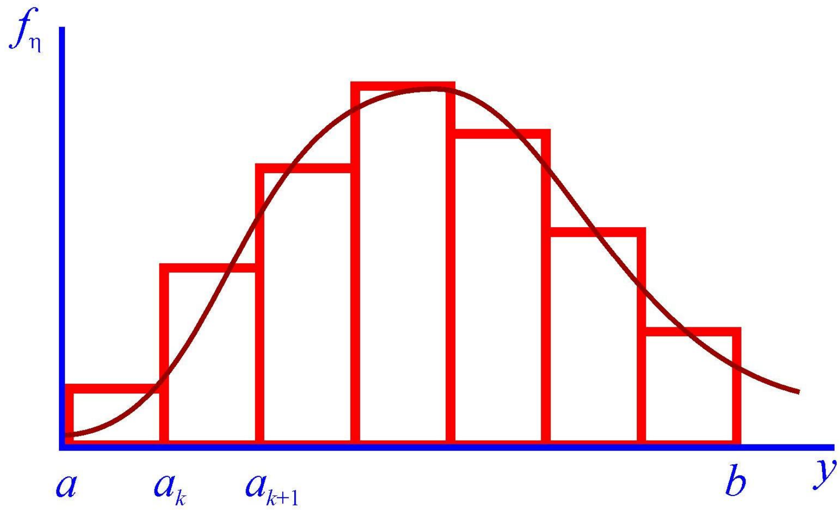


Рис. 4.12. Кусочная аппроксимация функции плотности

Тогда случайную величину η можно представить в виде $\eta = a_k + \eta_k^*$, где a_k — абсцисса левой границы k-го интервала; η_k^* — случайная величина, возможные значения которой располагаются равномерно внутри

k-го интервала, т.е. на каждом участке $a_k \div a_{k+1}$ величина η_k* считается распределённой равномерно. Чтобы аппроксимировать $f_\eta(y)$ наиболее удобным для практических целей способом, целесообразно разбить (a, b) на интервалы так, чтобы вероятность попадания случайной величины η в любой интервал (a_k, a_{k+1}) была постоянной, т.е. не зависела от номера интервала. Таким образом, для вычисления a_k воспользуемся следующим соотношением:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_\eta(y)dy = \frac{1}{m}. \qquad (4.20)$$

Алгоритм машинной реализации этого способа получения случайных чисел сводится к последовательному выполнению следующих действий: 1) генерируется случайное равномерно распределённое число x_i из интервала (0,1); 2) с помощью этого числа случайным образом выбирается интервал (a_k, a_{k+1}); 3) генерируется число x_{i+1} и масштабируется с целью приведения его к интервалу (a_k, a_{k+1}), т.е. домножается на коэффициент $(a_k, a_{k+1})x_{i+1}$; 4) вычисляется случайное число $y_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$ с требуемым законом распределения.

Достоинства этого приближенного способа преобразования случайных чисел: при реализации на ЭВМ требуется небольшое количество операций для получения каждого случайного числа, так как операция масштабирования (4.20) выполняется только один раз перед моделированием, и количество операций не зависит от точности аппроксимации, т.е. от количества интервалов m.

Моделирование случайных векторов. При решении задач исследования характеристик процессов функционирования систем методом статистического моделирования на ЭВМ возникает необходимость в формировании реализаций *случайных векторов*, обладающих заданными вероятностными характеристиками. Случайный вектор можно задать проекциями на оси координат, причем эти проекции являются случайными величинами, описываемыми совместным законом распределения. В простейшем случае, когда рассматриваемый случайный вектор расположен на плоскости $x0y$, он может быть задан совместным законом распределения его проекций ξ и η на оси $0x$ и $0y$.

Рассмотрим дискретный случайный процесс, когда двухмерная случайная величина (ξ, η) является дискретной и ее составляющая ξ принимает возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а составляющая η — значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, причем каждой паре (x_i, y_i) соответствует вероятность p_{ij}. Тогда каждому возможному значению x_i случайной величины ξ будет соответствовать $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$.

Тогда в соответствии с этим распределением вероятностей можно определить конкретное значение x_i случайной величины ξ (по правилам, рассмотренным ранее) и из всех значений p_{ij} выбрать последовательность

$$p_{i_1 1}, p_{i_1 2}, ..., p_{i_1 n}, \tag{4.21}$$

которая описывает условное распределение величины η при условии, что $\xi = x_i$. Затем по тем же правилам определяем конкретное значение y_{i1} случайной величины η в соответствии с распределением вероятностей (4.21). Полученная пара (x_{i1}, y_{i1}) будет первой реализацией моделируемого случайного вектора. Далее аналогичным образом определяем возможные значения x_{i1}, выбираем последовательность

$$p_{i_2 1}, p_{i_2 2}, ..., p_{i_2 n} \tag{4.22}$$

и находим y_{i2} в соответствии с распределением (4.22). Это дает реализацию вектора (x_{i2}, y_{i2}) и т. д.

Рассмотрим моделирование непрерывного случайного вектора с составляющими ξ и η. В этом случае двухмерная случайная величина (ξ, η) описывается совместной функцией плотности $f(x, y)$. Эта функция может быть использована для определения функции плотности случайной величины ξ как

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Имея функцию плотности $f_\xi(x)$, можно найти случайное число x, а затем при условии, что $\xi = x_i$, определить условное распределение случайной величины η:

$$f_\eta\left(\frac{y}{\xi} = x_i\right) = f \, \frac{(x, y)}{f_\xi(x_i)}.$$

В соответствии с этой функцией плотности можно определить случайное число y_i. Тогда пара чисел (x_i, y_i) будет являться искомой реализацией вектора (ξ, η).

Рассмотренный способ формирования реализаций двухмерных векторов можно применить в случае многомерных случайных векторов. Однако при больших размерностях этих векторов объем вычислений существенно увеличивается, что создает препятствия к использованию этого способа в практике моделирования систем.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Альянах И.Н. Моделирование вычислительных систем / Л.: Машиностроение, 1988. 233 с.

Введение в математическое моделирование: учеб. пособие для вузов / под ред. П.В.Тарасова. М.: Интермет Инжиниринг, 2000. 200 с.

Ивченко Г.И. Математическая статистика: учеб. пособие для втузов / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. М.: Высш. шк., 1984. 248 с.

Мурашев В. П. Расчет и моделирование электромеханических систем: Учеб. пособие для студентов специальностей 210200, 170400/ В. П. Мурашев; Моск. гос. ун-т леса. 2-е изд., стер. М.: МГУЛ, 2002. 136 с.

Косоруков О. А. Исследование операций: учебник для студентов вузов/ под ред. Н. П. Тихомирова; Рос. экон. акад. им. Г. В. Плеханова. М.: Экзамен, 2003. 448 с.

Обвинцев В. В. Информационное обеспечение лесопромышленного производства: учеб. пособие для студентов вузов. Урал. гос. лесотехн. ун-т. Екатеринбург: УГЛТУ, 2005. 203 с.

Советов Б.Я. Моделирование систем : учеб. для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. М. : Высш. шк., 2001. 343 с.

Советов Б.Я. Моделирование систем : учеб. для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1998. 319 с.

Советов Б. Я. Моделирование систем: практикум : учеб. пособие для студентов вузов/ Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2003. 295 с.

Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учеб. для вузов. М.: Наука, 1997. 600 с.

Томашевский В. Н. Имитационное моделирование в среде GPSS / В. Н. Томашевский, Е. Г. Жданова. М.: Бестселлер, 2003. 416 с.

Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. М.: Мир, 1978. 308 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ